Proseminar (3 LP)

Zellularautomaten und diskrete komplexe Systeme

im Sommersemester 2019

Ausarbeitung

von **Niklas Bühler**, Matr.nr. 2116256

Thema

Teijiro Isokawa und Ferdinand Peper (2018)

Computation and Pattern Formation by Swarm Networks with Brownian Motion

Reversibility and Universality, Emergence, Complexity and Computation **30**, S.221-241

Erklärung

gemäß §6 (11) der Prüfungsordnung Informatik (Bachelor) 2015

Ich versichere wahrheitsgemäß, die Seminarausarbeitung zum Proseminar „Zellularautomaten und diskrete komplexe Systeme“ im Sommersemester 2019 selbstständig angefertigt, alle benutzten Hilfsmittel vollständig und genau angegeben und alles kenntlich gemacht zu haben, was aus Arbeiten anderer unverändert oder mit Abänderungen entnommen wurde.

(Niklas Bühler, Matr.nr. 2116256)

1 Einleitung

Ein Schwarmnetzwerk ist ein Netzwerk von Zellen, die Verbindungen zwischen einander auf- und abbauen können. Diese Zellen sind gleichartige Mealy-Automaten mit Anschlüssen, durch welche sie mit anderen Zellen – falls verbunden – kommunizieren können.

Ein solches Netzwerk unterscheidet sich von herkömmlichen Zellularautomaten durch seine sehr hohe Flexibilität: Zellen haben keine feste Nachbarschaft, sondern können diese dynamisch ändern, indem sie mit Zellen in ihrem Umfeld Verbindungen auf- und wieder abbauen können. Dabei spielt Brownsche Bewegung eine große Rolle. Sie führt zu zufälligen Fluktuationen der Positionen der einzelnen Zellen und somit auch zu Veränderungen ihrer Distanzen zueinander und ihrer Nachbarschaften.

In dieser Ausarbeitung sollen, basierend auf [3] und [1], die Modelle eines solchen Schwarmnetzwerkes sowie deren Fähigkeit Berechnungen anzustellen beleuchtet werden.

In Abschnitt 2 werden die verwendeten Modelle vorgestellt und definiert. Mithilfe dieser Modelle wird anschließend in Abschnitt 3 gezeigt, wie Berechnungen ausgeführt werden. In Abschnitt 4 wird die Ausarbeitung zusammengefasst und die bearbeiteten Konzepte werden hinsichtlich Anwendung und Implementierungsmöglichkeiten bewertet.

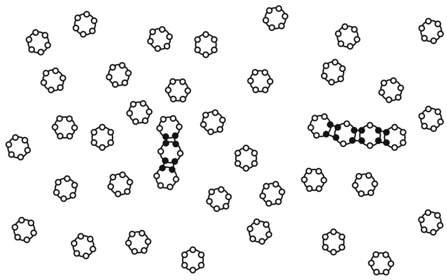


Abbildung 1: Ein Ausschnitt eines Schwarmnetzwerkes.

2 Modelle

2.1 Allgemeines zum Modell

Teijiro Isokawa und Ferdinand Peper haben bereits mehrere Arbeiten über Schwarmnetzwerke verfasst, die sehr eng zusammenhängen und sich auch oft aufeinander beziehen. In der ersten, *Computing by Swarm Networks* (2008) [2], gibt es keine Brownsche Bewegung, sondern die Anschlüsse jeder Zelle können Kräfte ausüben und somit Bewegungen erzeugen. Die Berechnungsuniversalität wird anhand der Konstruktion von sogenannten K- und E-Elementen erreicht. In der zweiten Arbeit, *Swarm Networks in Brownian Environments* (2015) [3] wird die weniger plausible Fähigkeit von Anschlüssen, Kräfte auszuüben durch die Einführung von Brownscher Bewegung relaxiert. Deshalb muss das Berechnungsmodell von K- und E-Elementen durch Brownsche Schaltkreise (siehe 3.1) ersetzt werden. Dies ist auch Thema dieser zweiten Arbeit. In der neusten Arbeit, *Computation and Pattern Formation by Swarm Networks with Brownian Motion* (2018) [1], wird außerdem noch die Fähigkeit der Musterbildung des Modells vorgestellt.

Über den Zeitraum von zehn Jahren und drei Arbeiten, die Schwarmnetzwerke behandeln, haben Isokawa und Peper jedoch stets sehr ähnliche Modelle verwendet. Das zu Beginn vorgestellte Modell unterscheidet sich nur in wenigen Details von dem in den neueren Arbeiten verwendeten. Im Folgenden wird das Modell der neueren Arbeiten vorgestellt. Dabei wird von der Struktur einer einzelnen Zelle ausgegangen und darauf aufbauend das Netzwerk eingeführt.

2.2 Zellen

Eine Zelle ist ein Mealy-Automat mit in gleichmäßigen Abständen platzierten Anschlüssen, die der Kommunikation mit anderen Zellen dienen.

Def. Zelle Formal ist eine *Zelle* ein 5-Tupel $A = (Q, T, P, f, X)$. Dabei ist

1. Q die endliche Menge der *Zustände der Zelle*;
2. $T = S^n$ das n-fache kartesische Produkt von S, der Menge der Anschlusszustände. T ist also die Menge der möglichen *Zustände aller Anschlüsse*;
3. $P = (S \cup \{\emptyset\})^n$ das n-fache kartesische Produkt der Zustände verbundener Anschlüsse anderer Zellen, wobei eine nicht vorhandene Verbindung durch $\emptyset$ kenntlich gemacht wird. P ist also die Menge aller möglichen *Zustände verbundener Anschlüsse*;
4. $f : Q \times T \times P \to Q \times T$ die *Zustandsübergangsfunktion*, welche den Zustand der Zelle, ihre Anschlusszustände und die Anschlusszustände verbundener Zellen auf einen neuen Zustand und neue Anschlusszustände abbildet;
5. $X \in R$ die *Position* der Zelle im Koordinatensystem eines kontinuierlichen und metrischen Raumes R.

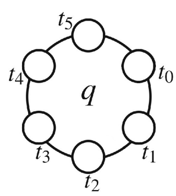


Abbildung 2: Eine Zelle mit Zustand q und Anschlusszuständen $t_0, \ldots, t_5$.

In den vorliegenden Arbeiten von Isokawa und Peper ist stets $n = 6$ und $R = \mathbb{R}^2$, eine Zelle hat also sechs Anschlüsse und befindet sich in der euklidischen Ebene.

Anschlüsse Anschlüsse sind Teil einer Zelle und befinden sich in regelmäßigen Abständen an deren Außenseite. Jeder Anschluss hat zu jedem Zeitpunkt genau einen Zustand und ist mit höchstens einem anderen Anschluss (einer anderen Zelle) verbunden. Er kann durch Verbindungsbedingungen Verbindungen zu einem Anschluss einer anderer Zelle aufbauen und wieder abbauen. Eine Zelle kann ihre eigenen Anschlusszustände lesen und setzen sowie Zustände verbundener Anschlüsse lesen. Ihr eigener Zustand ist jedoch grundsätzlich nur jeder Zelle selbst bekannt. Somit entsteht ein dezentrales System aus Zellen, was eine mögliche Implementierung erleichtert.

Verbindungen zwischen Zellen Zwischen den Anschlüssen verschiedener Zellen können Verbindungen bestehen. Diese sind elastisch, stoßen sich bei geringer Distanz ab und ziehen sich bei größerer Distanz an. Sie dienen also nicht nur dem Informationsaustausch, sondern auch dem räumlichen Zusammenhalt. Jede Zelle liest die verbundenen Anschlüsse anderer Zellen und diese beeinflussen ihren nächsten Zustand. Verbindungen werden durch die Verbindungsbedingungen (siehe 2.3) des Schwarmnetzwerkes reguliert.

Def. Zustandsübergangsfunktion Die *Zustandsübergangsfunktion* ist eine Funktion der Form

$$f : \begin{cases} Q \times T \times P \to Q \times T, \\ (q, t, p) \mapsto (q', t') \end{cases}$$

Sie ist rotationssymmetrisch, die Nummerierung von Anschlüssen ist also nicht ausschlaggebend für den Übergang. Verschiedene Zellen arbeiten asynchron, das heißt ihre Zustandswechsel finden nicht unbedingt synchron zueinander statt.

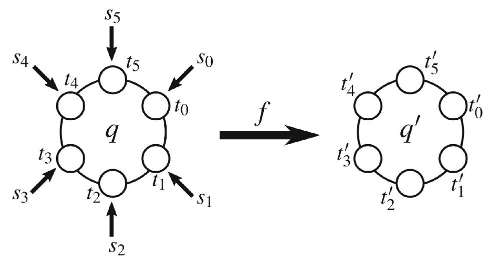


Abbildung 3: Eine Zelle, die ihren Zustand wechselt.

Def. Wandzelle *Wandzellen* sind Zellen, die nicht aktiv sind. Das heißt sie zeichnen sich durch einen konstanten Zustand q_1 und konstante Anschlusszustände vom Wert 20 aus. Diese können sie nie ändern. Somit sind die einzigen Abbildungsvorschriften der Zustandsübergangsfunktion, die auf sie zutreffen

$$\forall p \in P : (q_1, (20, 20, 20, 20, 20, 20), p) \mapsto (q_1, (20, 20, 20, 20, 20, 20)).$$

Außerdem werden sie – im Gegensatz zu allen aktiven Zellen – nicht durch Brownsche Bewegung beeinflusst.

Die Funktion von Wandzellen besteht einzig darin, den Raum für die aktiven Zellen zu begrenzen und Strukturen für diese bereitzustellen. In Abbildungen sind diese Zellen grau eingefärbt.

2.3 Schwarmnetzwerk

Ein Schwarmnetzwerk ist eine Menge von Zellen – bestehend aus aktiven Zellen und Wandzellen – zusammen mit Regeln, welche die Interaktion der Zellen beschreiben. Dabei sind in jedem Schwarmnetzwerk alle aktiven Zellen vom gleichen Typ, sie haben also dieselben Zustandsmengen und Zustandsüberführungsfunktion. Hierbei ist jedoch wichtig, dass die Funktionalität von Zellen abhängig von ihren Verbindungen ist. Somit kann sich die gleiche Zelle in anderen Situationen anders verhalten.

Die Zellen sind nicht in der Lage, sich selbstständig zu bewegen, werden jedoch von Brownscher Bewegung beeinflusst, welche somit essenziell ist um die Zellen zu bewegen. Somit sorgt diese für die nötige Flexibilität der Nachbarschaften. Zudem ahmt sie natürliche Prozesse nach und ist somit der Plausibilität hinsichtlich eventueller Implementierungen zuträglich.

Def. Schwarmnetzwerk Ein *Schwarmnetzwerk* ist ein 3-Tupel $S = (S_A, S_C, S_D)$ von endlichen Mengen

1. S_A an *Zellen* (Agenten) des Netzwerkes,
2. S_C an *Verbindungsaufbaubedingungen* und
3. S_D an *Verbindungsabbaubedingungen*.

Verbindungsbedingungen sind für das Regulieren von Verbindungen verantwortlich. Ist eine Verbindungsaufbaubedingung erfüllt, *kann* eine Verbindung aufgebaut werden, ist eine Verbindungsabbaubedingung erfüllt, *kann* eine Verbindung abgebaut werden. Hierbei ist wichtig, dass das bloße Erfüllen der Verbindungsbedingung noch nicht direkt zu einer unmittelbaren Aktion führt. Der Aufbau und Abbau von Verbindungen ist asynchron und stochastisch beeinflusst. Das heißt, bei erfüllter Bedingung gibt es eine Wahrscheinlichkeit ungleich Null, dass die jeweilige Aktion eintritt.

Für den Aufbau von Verbindungen spielt die Distanz zweier Anschlüsse eine Rolle. Hier wird ersichtlich, warum Brownsche Bewegung eine wichtige Komponente des Systems darstellt, da sie für die nötigen Fluktuationen der Distanzen zwischen Zellen und somit auch zwischen ihren Anschlüssen sorgt.

Def. Verbindungsbedingungen Eine *Verbindungsaufbaubedingung* ist ein 3-Tupel $C = (S_1, S_2, R)$, wobei

1. S_1 und S_2 die Mengen der *erlaubten Zustände* je Anschluss einer Zelle sind und
2. $R \in \mathbb{R}_0^+$ als Maximum das *erlaubte Intervall von Distanzen* zwischen den beiden Anschlüssen festlegt.

Eine *Verbindungsabbaubedingung* ist ein 2-Tupel $D = (S_1, S_2)$, wobei S_1 und S_2 wieder für Mengen von *erlaubten Zuständen* von Anschlüssen stehen. Die Distanz ist hierbei nicht wichtig, da sie ohnehin durch die bereits bestehende Verbindung zwischen den beiden Anschlüssen limitiert ist.

2.4 Rolle der Stochastik im Modell

Brownsche Bewegung Die Brownsche Bewegung, der die Zellen ausgesetzt sind, führt zu zufälligen Fluktuationen ihrer Positionen. Da veränderte Positionen im Allgemeinen zu veränderten Distanzen der Zellen zueinander führen und die Distanz ein Parameter der Verbindungsaufbaubedingungen ist, hat eine Veränderung der Position einer Zelle große Auswirkungen auf ihre Verbindungen zu anderen Zellen. Diese Verbindungen legen sowohl ihre Nachbarschaft als auch ihre Funktionalität fest. Somit hat der Zufall, der durch Brownsche Bewegung eingeführt wird, große Auswirkungen auf die Funktionalität jeder Zelle und damit auf die des ganzen Netzwerkes.

Eine Zelle kann dies jedoch beeinflussen, indem sie ihre Anschlusszustände so setzt, dass Verbindungen auf- oder abgebaut werden. Durch Verbindungen die sie erhält, kann sie sich – wegen derer Elastizität – räumlich an andere Zellen binden. Durch Anschlüsse die sie in Verbindungsbereitschaft bringt, kann sie versuchen, neue Zellen an sich zu binden und somit ihre Nachbarschaft und Funktionalität ändern.

Asynchronität Übergänge im Modell verlaufen asynchron. Das heißt es gibt keine festen Zeitschritte, zu denen alle Zellen aktualisiert werden.

Sei $((q, t, p), (q', t')) \in f$ eine Abbildungsvorschrift der Zustandsübergangsfunktion. Die zugehörige Übergangsbedingung ist also $(q, t, p) \in Q \times T \times P$. Diese heißt *erfüllt*, wenn sich eine Zelle im Zustand q, ihre Anschlüsse in den durch $t = (t_0, \ldots, t_5)$ beschriebenen Zuständen und die verbundenen Anschlüsse anderer Zellen in den durch $p = (p_0, \ldots, p_5)$ festgelegten Zuständen befinden. Ist die Bedingung erfüllt, so besteht eine Wahrscheinlichkeit ungleich Null, dass die Zelle in den Zustand q' und ihre Anschlüsse in die Zustände $t' = (t'_0, \ldots, t'_5)$ übergehen.

Bei Verbindungsaufbaubedingungen verläuft der Vorgang ähnlich: Eine Verbindungsaufbaubedingung $(S_1, S_2, R) \in S_C$ heißt *erfüllt*, wenn sich zwei Anschlüsse zweier verschiedener Zellen in jeweils einem Zustand $s_1 \in S_1$ und $s_2 \in S_2$ befinden und die Distanz zwischen ihnen geringer als R ist. Bei einer Verbindungsabbaubedingung lautet die Regel $(S_1, S_2) \in S_D$ und die Distanz der Anschlüsse kann beliebig sein. Ist eine Verbindungsbedingung erfüllt, so besteht eine Wahrscheinlichkeit ungleich Null, dass eine Verbindung zwischen diesen beiden Anschlüssen auf- beziehungsweise abgebaut wird.

Die jeweiligen Zustandswechsel und Verbindungsauf- und abbauprozesse erfolgen in einem diskreten Zeitschritt, wann dieser stattfindet ist jedoch als stochastischer Prozess modelliert. Also ist in diesem Modell die Zeit eine kontinuierliche Variable.

2.5 Modellparameter

Diese Modelle wurden allgemein definiert, um sie jedoch näher bezüglich ihrer Funktionen zu betrachten, werden nun ihre Parameter festgelegt. Wie bereits erwähnt, befinden sich die Zellen in der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ und haben $n = 6$ Anschlüsse.

Eine Zelle $A = (Q, T, P, f, X)$ wird festgelegt durch ihre Zustandsmenge $Q = \{q_1, q_2\}$, ihre Anschlusszustände $T = S^6$ und $P = (S \cup \{\emptyset\})^6$, wobei $S = \{1, \ldots, 20\}$. Die Position einer Zelle ist als $X \in \mathbb{R}^2$ definiert.

3 Berechnung

In der ersten Arbeit, *Computing by Swarm Networks*, von 2008 konnten die Zellen durch ihre Anschlüsse Kräfte ausüben und sich somit bewegen, ihre Nachbarschaft ändern und komplexere Berechnungen anstellen. Es wurden sogenannte *K*- und *E-Elemente* gebaut, welche universelle Berechnungen ermöglichen.

In den beiden neueren Arbeiten hingegen werden die Zellen durch Brownsche Bewegung beeinflusst und es werden Brownsche Schaltkreise gebaut. Diese Art der Berechnung wird hier vorgestellt. Es wird gezeigt, wie die fundamentalen Gatter dieser Schaltkreise – und somit auch komplexere Schaltkreise – mithilfe von Zellen konstruiert werden können.

Die Schaltungen existieren zu Beginn der Berechnung bereits, sie müssen also implementiert werden, die Zellen finden sich nicht selbst zu funktionsfähigen Schaltkreisen zusammen.

3.1 Brownsche Schaltkreise

Brownsche Schaltkreise sind Token-basierte Schaltkreise, das heißt in ihnen dienen Token als Signale. Der Begriff Token meint hierbei diskrete, unteilbare Einheiten. Token können sich nicht selbst vermehren oder zu einem einzelnen verschmelzen; sie sind innerhalb von Leitungen konserviert. Ein Schaltkreis besteht aus Leitungen, die jeweils maximal ein Token enthalten, und Gattern, die Leitungen verbinden und Token verarbeiten. Mithilfe der Gatter *Hub*, *CJoin* und *Ratchet* können komplexere Bausteine zusammengesetzt werden. Ein bekanntes weiteres Beispiel für Token-basierte Schaltkreise sind Petri-Netze.

Leitungen In jeder Leitung eines Brownschen Schaltkreises, also im Verbindungsstück zwischen zwei Schaltkreiselementen, existiert zu jedem Zeitpunkt maximal ein Token. Die Flussrichtung innerhalb dieser Leitung ist nicht festgelegt:

Ein Token kann sich sowohl in die eine, als auch in die andere Richtung bewegen. Dabei kann sich seine Bewegungsrichtung zu einem zufälligen Zeitpunkt ändern, sie fluktuiert also. Dieses Verhalten verlangsamt Berechnungen im Allgemeinen zwar ungemein, es kann aber auch in einem solchen Schaltkreis nicht zu Deadlocks kommen.

Hub Ein *Hub* verbindet drei Leitungen. Nur ein einziges Token darf sich auf genau einer dieser Leitungen dem Hub nähern. Fluktuationen seiner Position bewirken das Wechseln des Tokens von seiner ursprünglichen auf eine der anderen beiden Leitungen. Das Wechseln kann in beliebiger Reihenfolge und beliebig oft geschehen. In Grafiken werden Hubs als Kreise dargestellt.

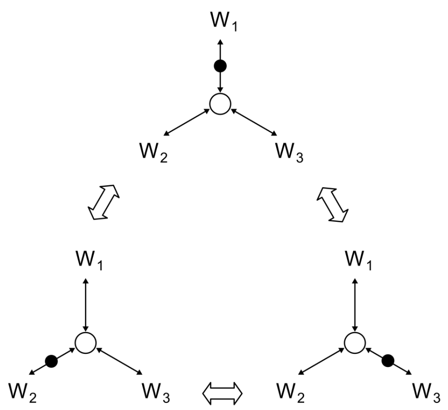


Abbildung 4: Die möglichen Übergänge in einem Hub. Das Token ist als schwarzer Punkt dargestellt. Durch Fluktuationen kann es zwischen den drei Leitungen W_1, W_2 und W_3 wechseln.

CJoin Ein *CJoin*, ausgeschrieben *Conservative Join*, hat vier angeschlossene Leitungen. Es synchronisiert zwei Signale, sobald sich je ein Token auf zwei gegenüberliegenden Leitungen befindet: Die beiden Token wechseln ihre Leitungen zu den zu ihnen orthogonal stehenden. Dieser Vorgang kann auch hier beliebig oft stattfinden. Befindet sich auf nur einer Leitung ein Token, passiert nichts, bis auf der gegenüberliegenden Leitung ein weiteres ankommt. In Grafiken werden CJoins als Quadrate dargestellt.

Ratchet Ein *Ratchet* beschränkt die Flussrichtung einer Leitung. Hat ein Token das Ratchet einmal überschritten, kann es in die andere Richtung nicht mehr passieren. Die bidirektionalen Leitungen werden durch Ratchets unidirektional. Dieses Schaltungselement kann somit Suchvorgänge beschleunigen.

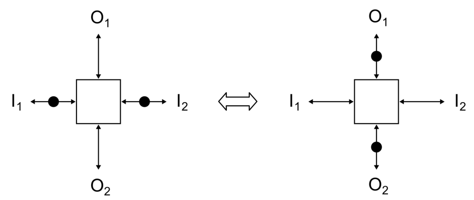


Abbildung 5: Die möglichen Übergänge in einem CJoin. Wenn auf beiden Eingangsleitungen (I_1 und I_2) ein Token anliegt, können diese simultan auf die Ausgangsleitungen (O_1 und O_2) wechseln. Die Rückrichtung ist anschließend auch möglich. Genau genommen gibt es keinen Unterschied zwischen Eingangs- und Ausgangsleitungen.

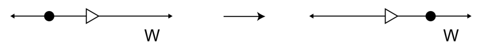


Abbildung 6: Der einzige mögliche Übergang in einem Ratchet. Das Token kann vor und nach dem Ratchet fluktuieren, hat es jedoch einmal die Grenze überschritten, ist ein Zurückkehren ausgeschlossen.

3.2 Bauen der Schaltkreiselemente mittels Zellen

Die Realisierungen der Schaltkreiselemente bestehen ausschließlich aus Wandzellen und gewöhnlichen Zellen: Sie alle teilen sich die gleiche Zustandsmenge, die gleiche Anschlusszustandsmenge und die gleiche Zustandsübergangsfunktion. Dennoch haben die verwendeten Zellen, je nach Verbindungen und Zustand, verschiedene Funktionen. Das ist möglich, da die Zustandsübergangsfunktion zwischen verschiedenen Verbindungsmustern unterscheiden kann.

3.2.1 Zelltypen

Die verschiedenen Zelltypen sind durch ihre Verbindungen gemäß Abbildung 7 festgelegt.

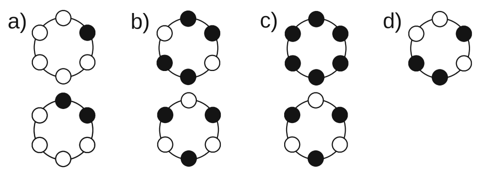


Abbildung 7: Spalte **a)** zeigt Zellen, die für die Signalübertragung verantwortlich sind, **b)** zeigt Zellen, die in einer *Kreuzung* verbaut sind, **c)** zeigt Zellen eines *CJoins* und **d)** zeigt die *Ratchet*-Zelle. Die schwarz markierten Anschlüsse zeigen eine Verbindung zu einer anderen Zelle an.

Diesen verschiedenen Zelltypen kann die Zustandsübergangsfunktion getrennt

Funktionalitäten zuweisen, da ihre Verbindungsmuster invariant bezüglich Rotationssymmetrie sind. Lediglich die Kreuzung und das CJoin teilen sich einen Typ Zelle, der jedoch bei beiden dieselbe Funktionalität aufweist.

3.2.2 Leitungen

Eine Leitung darf immer nur maximal ein Signal, beziehungsweise Token, enthalten. Das Token ist nicht eine Zelle, sondern der Zustand q_2. In einer Leitung können also mehrere Zellen vorliegen, jedoch nur eine, die sich im Zustand q_2 befindet.

Aufbau einer Leitung Eine Leitung besteht aus mehreren Wandzellen, die im zweidimensionalen Raum eine räumliche Begrenzung in Form von zwei parallelen Linien bilden und somit den zwischen ihnen enthaltenen normalen Zellen die nötige Struktur für die Signalübertragung bieten. Da sich Wandzellen nicht bewegen, ist eine Leitung also vergleichbar mit einer Art Rohr, in welchem sich bewegliche Zellen befinden.

Signalübertragung in einer Leitung Wie bereits angedeutet ist nicht eine einzelne Zelle, sondern ihr Zustand das Signal das sich fortbewegt. Jedoch kann eine Zelle den Zustand q_2, also das Signal, an eine andere Zelle weitergeben. Bei diesem Wechsel muss sichergestellt werden, dass das Signal nicht verloren geht oder sich vervielfacht. Da die Zellen aber unabhängig voneinander arbeiten, sind Kommunikation und Synchronisation essenziell um diese Ziele einzuhalten. Dafür wird ein Handshake-Protokoll eingeführt.

Zu Beginn ist eine einzige Zelle mit Zustand q_2 (im Folgenden *Zelle A*) durch eine Verbindung an einer der beiden Wände der Leitung, also an einer Wandzelle, befestigt. Sie setzt ihre Anschlusszustände so, dass eine Verbindung zu einer anderen Zelle aufgebaut werden kann. Es ist wichtig, dass auch alle freien Zellen im Zustand q_1 ihre Anschlüsse in einem Zustand halten, der es anderen Zellen ermöglicht, mit ihnen Verbindungen aufzubauen. Durch Brownsche Bewegung kommt zwangsläufig irgendwann eine dieser freien Zellen im Zustand q_1 (im Folgenden *Zelle B*) in die Nähe von *Zelle A* und baut eine Verbindung auf.

Im ganzen Prozess können die Zellen ihre Anschlüsse zwar selbst setzen, wann jedoch das erwartete Ergebnis (Verbindungsauf- oder abbau) eintritt, können sie nicht beeinflussen. Durch eine Wahrscheinlichkeit ungleich Null wird es aber irgendwann sicher eintreten.

Sind beide Zellen verbunden, tauschen sie Informationen über ihre Anschlüsse aus, die mit Hilfe des festgelegten Handshake-Protokolls folgenden grob beschriebenen Ablauf regeln:

1. *Zelle B* nimmt auch Zustand q_2 an,
2. *Zelle A* wechselt in Zustand q_1,
3. *Zelle B* baut ebenfalls eine Verbindung zu einer Wandzelle auf. Sie befindet sich nun auf einer der beiden Seiten von *Zelle A*,

4. Sie kommuniziert diesen Fakt über die Verbindung zu *Zelle A*, welche daraufhin ihre Verbindung zur Wand der Leitung löst,
5. Anschließend setzen beide Zellen ihre Anschlusszustände so, dass ihre Verbindung zueinander abgebaut wird.

Anhand von Abbildung 8 lassen sich dieser Vorgang und die Funktion des Handshake-Protokolls konkreter beschreiben:

a) *Zelle A* ist mit einer Wandzelle verbunden.
b) Eine sich frei bewegende normale Zelle im Zustand q_1 (*Zelle B*) nähert sich.
c) Durch die Verbindungsaufbauverbindung $C(1, 2, r)$ wird eine Verbindung zwischen den beiden Zellen aufgebaut.
d) Die beiden Zellen tauschen Informationen über die nun existierende Verbindung aus und wechseln jeweils ihren Zustand: Das Token fließt von *Zelle A* zu *Zelle B*. Durch die Verbindungsaufbaubedingung $C(5, 20, r)$ baut nun *Zelle B* auch eine Verbindung zu einer Wandzelle auf.
e) Sie kommuniziert dies an *Zelle A*, welche daraufhin ihren Anschluss zur Wand auf Zustand 7 setzt, sodass die Verbindungsabbaubedingung $D(7, 20)$ erfüllt ist.
f) Die Verbindung zur Wand wurde abgebaut und *Zelle A* kommuniziert dies an *Zelle B*, woraufhin beide ihre Anschlusszustände so setzen, dass Verbindungsabbaubedingung $D(6, 7)$ erfüllt ist.
g) Die Verbindung zwischen ihnen wurde gelöst.
h) *Zelle B* nimmt denselben Gesamtzustand ein wie *Zelle A* zu Beginn und das Signal hat sich entlang der Leitungswand in eine zufällige Richtung fortbewegt.

Auf welcher der beiden Seiten von *Zelle A* sich *Zelle B* tatsächlich befindet ist irrelevant. Es ist auch notwendig, dass die Richtung, in die sich das Signal fortbewegt, nicht festgelegt ist, denn durch diese Bidirektionalität ist die definierende Eigenschaft von Brownschen Schaltkreisen erfüllt.

Die genauen Anschlusszustände in jedem Schritt und die verwendeten Zustandsübergangsregeln und Verbindungsauf- und abbaubedingungen finden sich in den Arbeiten von Isokawa und Peper im Anhang in Form von Tabellen [3].

Da die Leitung als Grundbaustein des Schaltkreises realisiert ist, können nun die komplexeren Schaltkreiselemente vorgestellt werden.

3.2.3 Hub

Aufbau eines Hubs Um ein Hub zu realisieren, werden drei Leitungen verbunden. Hierbei muss natürlich, wie bei allen anderen Schaltkreiselementen auch, der freie Raum zwischen den Wandzellen jeweils genug Platz für eine Zelle lassen. Damit das Signal sich aber in beide Richtungen fortbewegen kann, sollte die Distanz zwischen den beiden Wänden nicht mehr als zwei Zelldurchmesser betragen. Somit muss es sich nicht notwendigerweise an einer einzigen Wand fortbewegen und kann jede der abzweigenden Leitungen wählen.

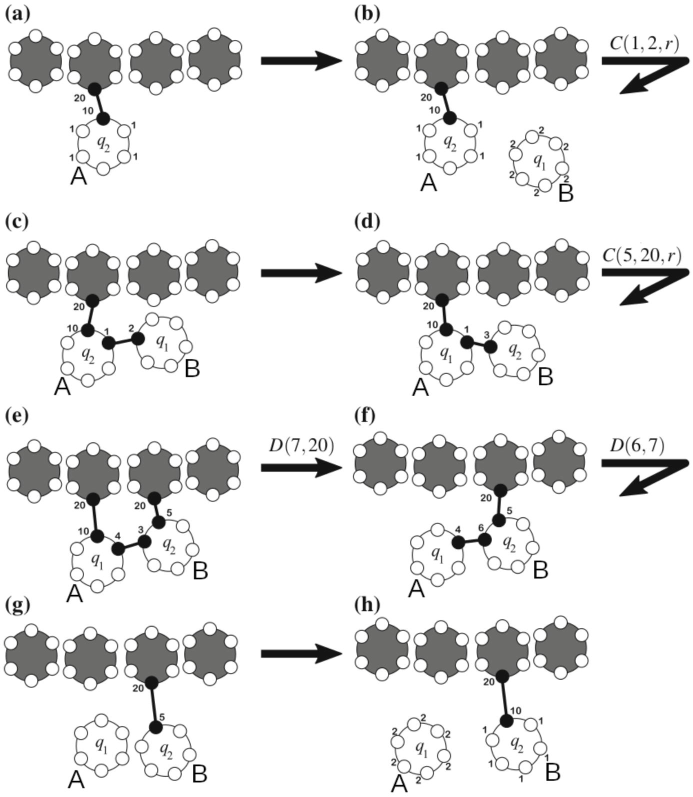


Abbildung 8: Die Bilder **a)-h** zeigen den genauen Ablauf der Signalübertragung innerhalb einer Leitung.

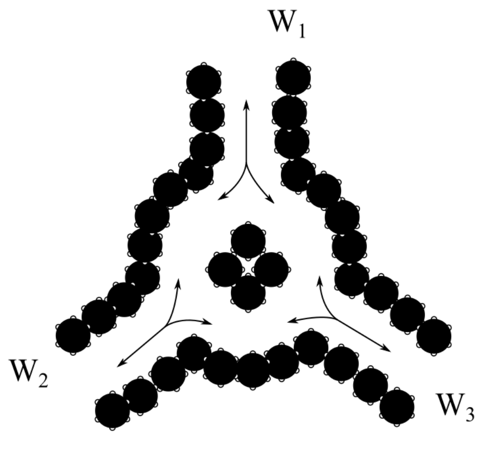


Abbildung 9: Die Konfiguration eines aus Wandzellen gebauten Hubs.

Funktionsweise eines Hubs Das Signal liegt in Form einer Zelle, verbunden mit einer der Wände der drei eingehenden Leitungen, vor. Durch seine zufällige

Fortbewegung entlang einer Wand in alle Richtungen wird es einen der drei möglichen Wege gehen: Entweder es geht in derselben Leitung aus der es kam wieder zurück oder es folgt einer der beiden Außenwände des Hubs und befindet sich anschließend in einer der beiden anderen Leitungen.

3.2.4 Kreuzung

Aufbau einer Kreuzung Eine Kreuzung besteht aus zwei Leitungen, die sich kreuzen, und fünf verbundenen Zellen in der Mitte der Kreuzung. Die Zelle in der Mitte der Kreuzung regelt die Übertragung des Signals (also des Zustands q_2) von der einen Seite der Kreuzung auf die andere. Die vier Zellen, die die Mitte der Kreuzung umgeben, sind für das Aufnehmen und Abgeben des Signals an sich frei bewegende Zellen verantwortlich.

Funktionsweise einer Kreuzung Kommt eine Zelle mit Zustand q_2 an einer Seite der Kreuzung an, wird dieser Zustand durch ein Handshake-Protokoll an die Zelle in der Mitte der Kreuzung übertragen. Die Richtung des Signals ist in den Anschlusszuständen der Zellen der Kreuzung codiert. Nun wird gewartet bis durch Brownsche Bewegung eine Zelle an der gegenüberliegenden Seite ankommt und eine Verbindung aufbaut. Das Signal wird nun an diese Zelle weitergegeben und anschließend die beiden Verbindungen zu den freien Zellen gelöst. Somit hat das Signal die Kreuzung passiert, ohne in die andere Leitung wechseln zu können.

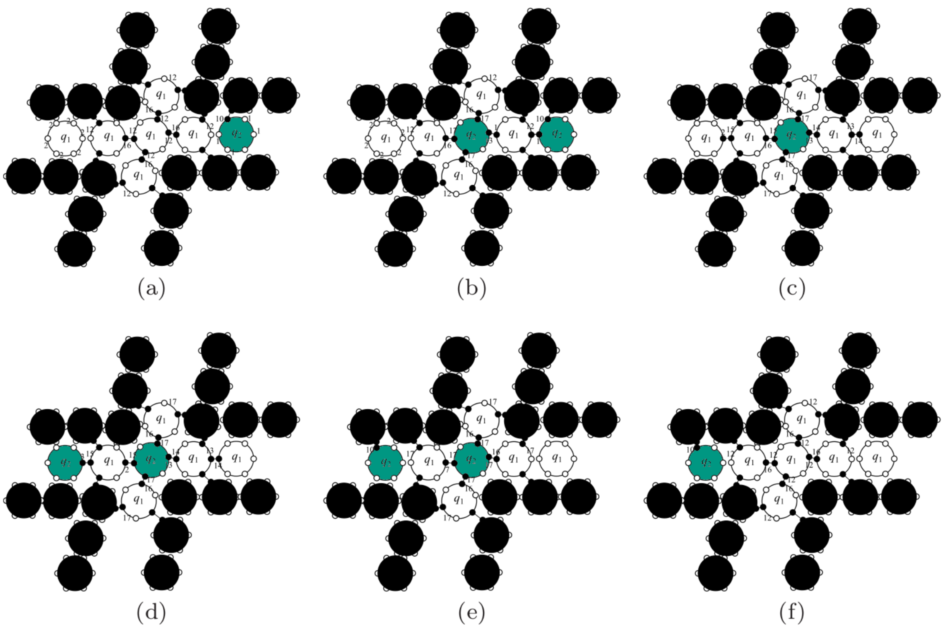


Abbildung 10: Die Funktionsweise einer Kreuzung.

3.2.5 CJoin

Die Funktionsweise des CJoins ähnelt der der Kreuzung. Die beiden Schaltkreiselemente teilen sich sogar einen Zelltyp in ihrer Implementierung.

Aufbau eines CJoins Ein CJoin besteht auch aus zwei Leitungen, die sich kreuzen, und fünf verbundenen Zellen in der Mitte der Kreuzung. Der einzige Unterschied zur Kreuzung ist, dass die mittlere Zelle sechs statt vier Verbindungen hat.

Funktionsweise eines CJoins Kommen zwei Zellen im Zustand q_2 auf gegenüberliegenden Seiten des CJoins an und bauen eine Verbindung auf, wird das Signal an die mittlere Zelle übertragen und die beiden angekommenen Zellen wechseln in Zustand q_1. Anschließend wird gewartet, bis an beiden orthogonal dazu liegenden Leitungen aktive Zellen im Zustand q_1 ankommen und sich verbinden. Das passiert irgendwann, da eine Wahrscheinlichkeit ungleich Null besteht. Anschließend wird ihnen der Zustand q_2 übertragen und alle Verbindungen zu ursprünglich freien Zellen werden wieder gelöst.

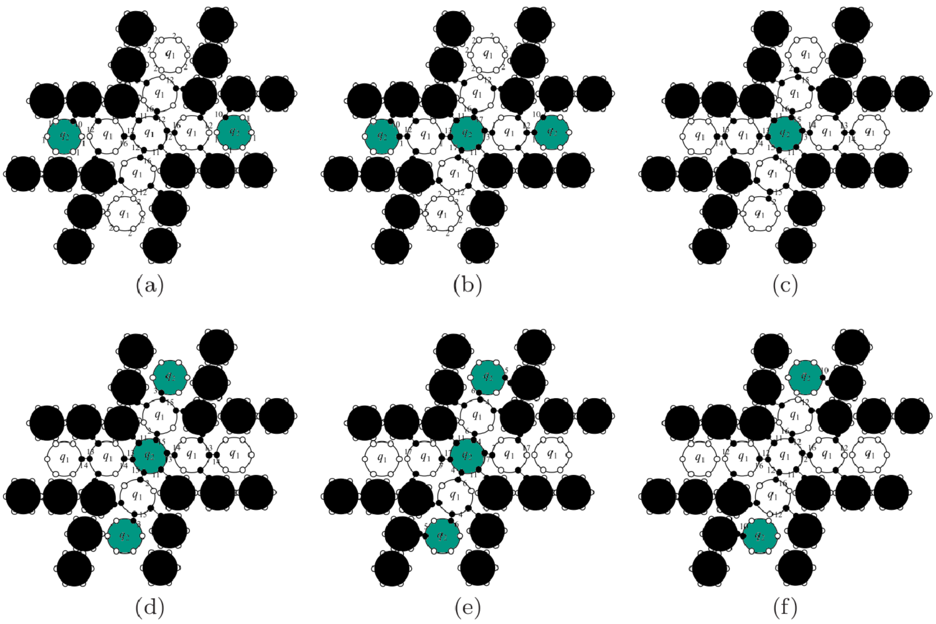


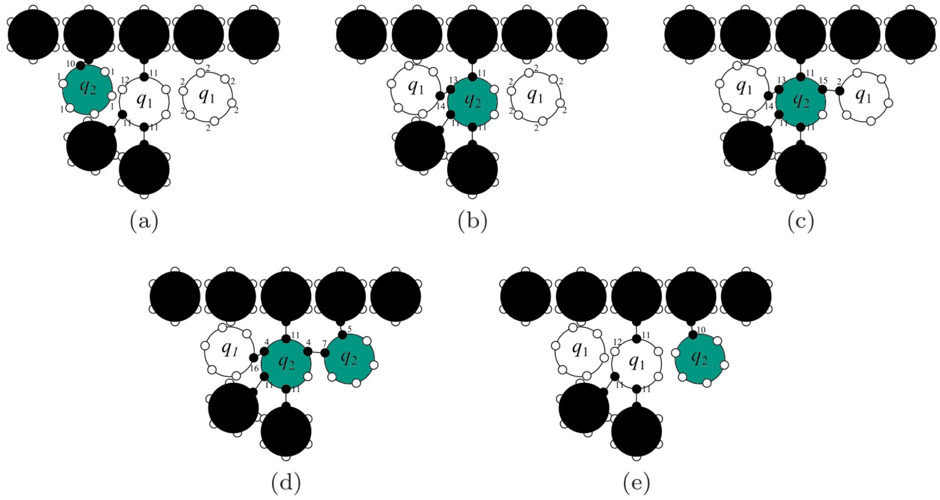
Abbildung 11: Die Funktionsweise eines CJoins.

3.2.6 Ratchet

Aufbau eines Ratchets Ein Ratchet besteht nur aus einer aktiven Zelle. Diese besitzt ein asymmetrisches Verbindungsmuster, welches ihr die Direktionalität verleiht, die sie benötigt.

Funktionsweise eines Ratchets Wenn sich das Signal dem Ratchet von der richtigen Seite nähert und die Signalzelle eine Verbindung aufbaut, wechseln beide Zellen ihren Zustand. Anschließend wird gewartet, bis irgendwann zwangsläufig eine freie Zelle im Zustand q_1 eine Verbindung zur anderen Seite der Ratchetzelle aufbaut. Dann wird das Signal an sie übertragen und alle Verbindungen zu freien Zellen werden aufgebrochen.

Das Signal kann jedoch nur von dieser einen Seite das Ratchet passieren. Von der anderen Seite wird schlichtweg keine Verbindung zu Signalzellen aufgebaut.



(a) (b) (c) (d) (e)

Abbildung 12: Die Funktionsweise eines Ratchets.

4 Fazit

Das vorgestellte Schwarmnetzwerk kann universelle Berechnungen ausführen, indem es die Mealy-Automaten in einzelnen Zellen verbindet und durch Brownsche Bewegung über flexible Nachbarschaften verfügt. Hierbei spielen die Wandzellen eine wichtige Rolle, da sie die nötigen Strukturen bereitstellen, ohne welche nützliche Berechnungen wahrscheinlich nicht möglich sind.

Obwohl die Berechnung in der Theorie funktioniert, ist sie in der Praxis recht langsam, da sehr viele stochastische Prozesse mit unbekannter Dauer ablaufen. Trotzdem haben die benötigten Mengen an Zuständen eine feste obere Schranke, unabhängig von der Größe des implementierten Schaltkreises: Die Zellen des Netzwerkes benötigen zwei Zustände, 17 Anschlusszustände und 157 Zustandsübergangsregeln. Die Autoren halten diesbezüglich aber noch reichlich Verbesserung für möglich.

Diese Art der Berechnung könnte in mikro-/nano-skalierten verteilten Systemen Anwendung finden. Eine mögliche Implementierung der theoretischen Basis könnte in der Biologie und Chemie interessant sein. Hier könnten zum Beispiel

Proteine als Zellen agieren: Ein Protein kann sich durch Zugabe eines Phosphor-Moleküls in verschiedenen Zuständen befinden. Außerdem ist die Funktion von Proteinen beeinflusst durch andere Proteine in ihrer Nähe (Proteindomäne), genauso wie die Nachbarschaft Einfluss auf die Funktionalität einer Zelle nimmt. Es wird zwar eine große Anzahl an Zellen benötigt, das stellt jedoch nicht unbedingt ein Hindernis für eine Implementierung dar, da die Zellen relativ simpel sind und deshalb in Massen verfügbar sein sollten. Die Autoren nennen die Vereinfachung der Zellen im Sinne einer Reduktion der Zustandsmengen und die Identifizierung von chemischen Reaktionen, welche den Übergangsregeln entsprechen, als wichtige nächste Schritte.

Literatur

[1] Teijiro Isokawa and Ferdinand Peper. Computation and pattern formation by swarm networks with brownian motion. *Reversibility and Universality, Emergence, Complexity and Computation*, 30:221–241, 2018.

[2] Teijiro Isokawa, Ferdinand Peper, Masahiko Mitsui, Jian-Qin Liu, Kenichi Morita, Hiroshi Umeo, Naotake Kamiura, and Nobuyuki Matsui. Computing by swarm networks. *ACRI 2008, LNCS 5191*, pages 50–59, 2008.

[3] Masashi Mori, Teijiro Isokawa, Ferdinand Peper, and Nobuyuki Matsui. Swarm networks in brownian environments. *New Generation Computing*, 33:297–318, 2015.