Mächtigkeiten, Kardinalzahlen und die Kontinuumshypothese

Niklas Bühler

17.12.2019

Im Folgenden seien x und y Mengen, $\omega = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots\}$, $i \in \omega$, α und β *Ordinalzahlen*, δ eine *Limeszahl* und κ eine *Kardinalzahl.*

1 Mächtigkeiten

1.1 Definition Mächtigkeitsrelationen

(i) *x ist gleichmächtig mit y* (kurz $x \sim y$) $:\Longleftrightarrow \exists f \; f : x \xrightarrow{bij} y$,

(ii) *x ist höchstens so mächtig wie y* (kurz $x \preceq y$) $:\Longleftrightarrow \exists f \; f : x \xrightarrow{inj} y$,

(iii) *x ist schmächtiger als y* oder *y ist mächtiger als x* (kurz $x \prec y$) $:\Longleftrightarrow$ $x \preceq y \land \neg x \sim y$.

1.6 Satz von Cantor Für alle x gilt $x \prec \mathrm{Pot}(x)$.

Beweis. Die auf x definierte Funktion g mit $u \mapsto \{u\}$ ist eine Injektion von x in $\mathrm{Pot}(x)$. Also ist $x \preceq \mathrm{Pot}(x)$.
Wir zeigen, dass es keine surjektive (und damit keine bijektive) Funktion von x auf $\mathrm{Pot}(x)$ geben kann. Dann ist $\neg x \sim \mathrm{Pot}(x)$, also $x \prec \mathrm{Pot}(x)$.
Annahme: $\exists f : x \xrightarrow{surj} \mathrm{Pot}(x)$.
Sei $z := \{u \in x \mid u \notin f(u)\} \in \mathrm{Pot}(x) = \mathrm{Bild}(f)$. Für geeignetes $v \in x$ ist $z = f(v)$, da f surjektiv ist. Dann ist aber $v \in f(v) \iff v \notin f(v)$ ein Widerspruch.
Somit gibt es keine Surjektion (und damit keine Bijektion) von x nach $\mathrm{Pot}(x)$ und es gilt $\neg x \sim \mathrm{Pot}(x)$, also $x \prec \mathrm{Pot}(x)$. □

1.7 Satz $\forall \alpha \; \exists \beta \; \alpha \prec \beta$.

Beweis. Sei α gegeben. Wähle β so, dass $\neg \beta \preceq \alpha$ (Satz von Hartogs). Dann ist $\alpha \preceq \beta$ (Konnexität von $\subseteq$) und $\neg \alpha \sim \beta$, also $\alpha \prec \beta$. □

1.8 Definition Die Alephfunktion

(i) $\aleph_x := \emptyset$, falls $\neg$ Oz x,

(ii) $\aleph_0 := \omega$,

(iii) $\aleph_{\alpha+1} :=$ das kleinste β mit $\aleph_\alpha \prec \beta$,

(iv) $\aleph_\delta := \bigcup\{\aleph_\beta \mid \beta < \delta\}$.

Jedes $\aleph_\alpha$ ist eine Limeszahl.

Anschauliche Anordnung $\mathbf{0} \prec \mathbf{1} \prec \mathbf{2} \prec \cdots \prec \omega = \aleph_0 \sim \omega + \mathbf{1} \sim \cdots \sim \omega \oplus \omega \sim \cdots \prec \aleph_1 \sim \aleph_1 + \mathbf{1} \sim \cdots \prec \aleph_2 \sim \aleph_2 + \mathbf{1} \sim \cdots \prec \aleph_\omega \sim \aleph_\omega + \mathbf{1} \ldots$
Alle Kardinalzahlen ab $\aleph_1$ sind unbekannt (und werden es bleiben).

2 Kardinalzahlen

Kardinalzahlen sind die kleinsten Vertreter der Äquivalenzklassen der Mächtigkeiten von Ordinalzahlen. Ab hier argumentieren wir in **ZFC**.

2.1 Definition Kardinalzahlen

$$x \text{ ist } \textit{Kardinalzahl} :\Longleftrightarrow x \in \omega \vee \exists \alpha\ x = \aleph_\alpha.$$

2.3 Satz Rolle der Kardinalzahlen als Mächtigkeitsmaßstäbe

$$\forall x\ \exists! \kappa\ x \sim \kappa.$$

2.4 Definition Mächtigkeit einer Menge

$$|x| := \text{ das } \kappa \text{ mit } x \sim \kappa, \text{ also } |x| := \begin{cases} i \in \omega \text{ mit } x \sim i, \text{ falls } x \text{ endlich,} \\ \aleph_\alpha \text{ mit } x \sim \aleph_\alpha, \text{ falls } x \text{ unendlich.} \end{cases}$$

2.6 Definition Abzählbarkeit, Unendlichkeit, Überabzählbarkeit

$$x \text{ heißt } \begin{cases} \textit{abzählbar} :\Longleftrightarrow |x| \leq \aleph_0, \\ \textit{abzählbar unendlich} :\Longleftrightarrow |x| = \aleph_0, \\ \textit{überabzählbar} :\Longleftrightarrow |x| \geq \aleph_1, \end{cases}$$

Beispiele

(i) $\omega \times \omega$ ist abzählbar unendlich,

(ii) $\mathrm{Pot}(\omega)$ ist überabzählbar,

2.7 Satz Die Vereinigung von höchstens $\aleph_\alpha$ vielen Mengen einer Mächtigkeit $\leq \aleph_\alpha$ hat eine Mächtigkeit $\leq \aleph_\alpha$, d.h.

$$|X| \leq \aleph_\alpha \wedge \forall y (y \in X \to |y| \leq \aleph_\alpha) \to |\bigcup X| \leq \aleph_\alpha.$$

Beweis. Sei $|X| \leq \aleph_\alpha$ und $g : X \xrightarrow{inj} \aleph_\alpha$. Für alle $y \in X$ sei $|y| \leq \aleph_\alpha$, also $\{f \mid f : y \xrightarrow{inj} \aleph_\alpha\} \neq \emptyset$. Zu jedem $y \in X$ wählen wir eine Injektion von y in $\aleph_\alpha$, indem wir von einer Auswahlfunktion h auf

$$\{\{f \in {}^y\aleph_\alpha \mid f \text{ Injektion}\} \mid y \in X\}$$

ausgehen. Für $h(\{f \in {}^y\aleph_\alpha \mid f \text{ Injektion}\})$, also die zu y gewählte Injektion von y in $\aleph_\alpha$, schreiben wir kurz h_y. Wir definieren eine Injektion f von $\bigcup X$ in $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$ dadurch, dass wir für $z \in \bigcup X$

$$f(z) = (\gamma_0, \gamma_1)$$

setzen; hierbei sei γ_0 die kleinste Ordinalzahl γ mit $z \in g^{-1}(\gamma)$ und es sei $\gamma_1 = h_{g^{-1}(\gamma_0)}(z)$. Damit ist $\bigcup X \preceq \aleph_\alpha \times \aleph_\alpha \sim \aleph_\alpha$, also $|\bigcup X| \leq \aleph_\alpha$. $\square$

2.14 Satz Mächtigkeiten von $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$

(i) $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$,

(ii) $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$.

Beweis. Zu (i): Ohne $\mathbb{Z}$ formal einzuführen ist

$$f : \mathbb{Z} \to \omega \text{ mit } n \mapsto \begin{cases} 2n - 1, & \text{falls n} > \mathbf{0}, \\ -2n, & \text{falls n} \leq \mathbf{0}. \end{cases}$$

eine Bijektion.
Zu (ii) argumentiert man ähnlich. $\square$

2.15 Satz Mächtigkeit von $\mathbb{R}$

$$|\mathbb{R}| = \mathbf{2}^{\aleph_0} (= |{}^{\aleph_0}\mathbf{2}|).$$

Beweis. $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$f(r) := \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{falls } r = \mathbf{0}, \\ \frac{\mathbf{1}}{r+\mathbf{1}}, & \text{falls r} > \mathbf{0}, \\ \frac{\mathbf{1}}{r-\mathbf{1}}, & \text{falls r} < \mathbf{0}. \end{cases}$$

$$g(r) := \frac{r + \mathbf{1}}{\mathbf{2}}.$$

Dann ist $g \circ f$ eine Bijektion von $\mathbb{R}$ auf das Intervall $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$. Daher ist

$$\mathbb{R} \sim (\mathbf{0}, \mathbf{1}). \tag{1}$$

Indem wir einer reellen Zahl aus $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ ihre nicht-abbrechende Dualdarstellung zuordnen und dieser die Folge ihrer Dualziffern, erkennen wir, dass $(\mathbf{0}, \mathbf{1}) \preceq {}^{\aleph_0}\mathbf{2}$, also, mit (1), dass $|\mathbb{R}| \leq \mathbf{2}^{\aleph_0}$. Umgekehrt ergibt sich $\mathbf{2}^{\aleph_0} \leq |\mathbb{R}|$ dadurch, dass wir einem $f \in {}^{\aleph_0}\mathbf{2}$ die reelle Zahl $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f(i)}{\mathbf{2}^{\mathbf{2}i+\mathbf{1}}}$ zuordnen.

$\square$

3 Die Kontinuumshypothese

Für endliche i gilt: $\mathbf{2}^{i+1} > i + \mathbf{1}$. Cantors Vermutung 1878 war $\mathbf{2}^{\aleph_0} = \aleph_1$. Diese Hypothese ist jedoch in **ZFC** nicht entscheidbar.

Für offene und abgeschlossene Teilmengen gibt es Sätze, die Aussagen über deren Mächtigkeiten treffen.

Interessante Beispiele ohne offene Teilmengen

$$N := \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$$

ist nicht abgeschlossen (Häufungspunk 0 nicht enthalten) und enthält keine offenen Teilmengen. Sie ist offensichtlich abzählbar unendlich: $f : \mathbb{N} \to N,\ n \mapsto \frac{1}{n}$.

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ sind ebenfalls nicht abgeschlossen (jede irrationale Zahl lässt sich durch Brüche approximieren) und enthält auch keine offenen Teilmengen. $\mathbb{Q}$ ist auch abzählbar unendlich (Satz 2.14 oder Cantors Diagonalargument).

Die Cantor-Menge ist ebenfalls abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$ und enthält keine offenen Teilmengen. Sie ist jedoch überabzählbar.

Definition CH („Continuum Hypothesis")

$$\mathbf{2}^{\aleph_0} = \aleph_1,$$

wobei $\mathbf{2}^{\aleph_0}$ die Mächtigkeit der reelen Zahlen, also des Kontinuums, ist.

Definition CH*

$$\forall X\ (X \subseteq \mathbb{R} \wedge X \text{ unendlich } \Rightarrow X \sim \aleph_0 \vee X \sim \mathbb{R}).$$

CH ist in **ZFC** äquivalent zu CH*.

Definition GCH („General Continuum Hypothesis")

$$\forall \alpha\ \mathbf{2}^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}.$$

Definition GCH*

$$\forall X\ (X \text{ unendlich } \Rightarrow \neg \exists Y\ (X \prec Y \wedge Y \prec \operatorname{Pot}(X))).$$

GCH ist in **ZFC** äquivalent zu GCH*.

4.8 Satz Mächtigkeit offener Teilmengen von $\mathbb{R}$

$$X \text{ offene Teilmenge von } \mathbb{R} \Rightarrow (X = \emptyset \vee |X| = |\mathbb{R}|).$$

Beweis. Ist X eine nicht leere offene Teilmenge von $\mathbb{R}$, so umfasst X ein nicht leeres offenes Intervall I. Im Beweis von Satz 2.15 (i) (Mächtigkeit der reellen Zahlen) haben wir gesehen, dass das offene Einheitsintervall $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ die gleiche Mächtigkeit wie $\mathbb{R}$ hat. Da offenbar $|(\mathbf{0}, \mathbf{1})| = |I|$, ist $|\mathbb{R}| = |I| \leq |X| \leq |\mathbb{R}|$, also $|X| = |\mathbb{R}|$. $\square$

Satz 4.8 gilt gleichermaßen für Mengen reeller Zahlen, die eine nicht leere offene Menge umfassen.

4.9 Satz Mächtigkeit abgeschlossener Teilmengen von $\mathbb{R}$

$$X \text{ abgeschlossene Teilmenge von } \mathbb{R} \Rightarrow (|X| \leq \aleph_0 \vee |X| = |\mathbb{R}|).$$

Ohne Beweis.