Nachtrag Satz 4.9

Niklas Bühler

Wiederholung Folgende Begriffe werden für die beiden Hilfssätze zu Satz 4.9 benötigt.

Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ und $r \in \mathbb{R}$. r heißt *Häufungspunkt* von X, wenn in jedem offenen Intervall I mit $r \in I$ eine von r verschiedene Zahl aus X enthalten ist. r heißt *Kondensationspunkt* von X, wenn für alle I mit $r \in I$ sogar $|I \cap X| \geq \aleph_1$ gilt, also wenn $|I \cap X|$ überabzählbar viele Elemente enthält. Mit $H(X)$ bezeichnen wir die Menge aller Häufungspunkte von X, mit $K(X)$ die Menge aller Kondensationspunkte von X. X ist *abgeschlossen*, wenn $H(X) \subseteq X$ und $H(X)$ abgeschlossen ist. X heißt *perfekt*, wenn $H(X) = X$.

Satz von Cantor und Bendixson Für alle abgeschlossenen Telmengen X von $\mathbb{R}$ existieren Teilmengen Y, Z von $\mathbb{R}$ mit:

(i) $X = Y \cup Z$,

(ii) $Y \cap Z = \emptyset$,

(iii) Y perfekt,

(iv) $|Z| \leq \aleph_0$.

Beweis. Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen. Dann ist $K(X) \subseteq H(X) \subseteq X$. Setze $Y := K(X)$ und $Z := X \setminus Y$. Somit sind (i) und (ii) schon erfüllt.

Jeder Punkt von Z ist kein Kondensationspunkt. Deshalb liegt er in einem offenen Intervall mit rationalen Endpunkten, das höchstens abzählbar viele Punkte enthält. Da es nur abzählbar viele offene Intervalle mit rationalen Endpunkten gibt, ist Z Teilmenge einer höchstens abzählbaren Teilmenge von X, also ist $|Z| \leq \aleph_0$.

Wegen $H(K(X)) \subseteq K(X)$ ist $H(Y) \subseteq Y$. Wenn aber $r \in Y$ ist, dann liegen in jedem offenen Intervall I mit $r \in I$ überabzählbar viele Punkte von Y. Es ist also $r \in H(Y)$ und damit $H(Y) \subseteq Y$. Somit gilt $H(Y) = Y$ und Y ist deshalb perfekt. $\square$

Hilfssatz 4.11 Eine perfekte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist leer oder hat die gleiche Mächtigkeit wie $\mathbb{R}$.

Beweis. Sei $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}$ perfekt. Wir zeigen ${}^{\omega}\mathbf{2} \preceq X$, dann ist $|X| = |\mathbb{R}|$, weil $|\mathbb{R}| = \mathbf{2}^{\aleph_0} = |{}^{\omega}\mathbf{2}|$.

Sei also $\mathbb{I} := \{I = [a_I, b_I] \subset \mathbb{R} \mid \exists x \in X : a_I < x < b_I\}$.
Da $X \neq \emptyset$, ist auch $\mathbb{I} \neq \emptyset$. Die Menge $\mathrm{Seq}_\omega(\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}) = \bigcup\{{}^{i}\mathbf{2} \mid i \in \omega\}$ enthält alle endlichen Folgen von $\mathbf{0}$ und $\mathbf{1}$. Wir definieren eine Abbildung $h : \mathrm{Seq}_\omega(\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}) \to \mathbb{I}$, sodass für alle Folgen $s, t \in \mathrm{Seq}_\omega(\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\})$ gilt:

(i) $(\mathrm{Def}(s) = i \wedge h(s) = I) \rightarrow b_I - a_I \leq \mathbf{2}^{-i}$,

(ii) $s \subseteq t \rightarrow h(t) \subseteq h(s)$,

(iii) $\mathrm{Def}(s) = i \wedge t_0 = s \cup \{(i, \mathbf{0})\} \wedge t_1 = s \cup \{(i, \mathbf{1})\} \rightarrow h(t_0) \cap h(t_1) = \emptyset$.

Daraus folgt ${}^{\omega}\mathbf{2} \preceq X$: Jedes $f \in {}^{\omega}\mathbf{2}$ bestimmt nach (i) und (ii) eine Folge $(h(f \mid i))_{i \in \omega}$ von Intervallen aus $\mathbb{I}$ mit $h(f \mid \mathbf{0}) \supseteq h(f \mid \mathbf{1}) \supseteq \ldots$, deren Längen gegen $\mathbf{0}$ konvergieren, also eine Intervallschachtelung. Sei r_f deren Grenzpunkt. Nach Definition von $\mathbb{I}$ ist $r_f \in H(X) \cup X = X$, da $H(X) = X$. Wegen (ii) und (iii) ist die Funktion $g : {}^{\omega}\mathbf{2} \rightarrow X$, mit $f \mapsto r_f$ injektiv.

Nun müssen wir eine Funktion h definieren, sodass (i), (ii) und (iii) gelten: Da jeder Punkt von X auch ein Häufungspunkt von X ist, liegen in einem Intervall I aus $\mathbb{I}$ mindestens zwei Punkte von X, x_0 und x_1. Zu diesen existieren zueinander disjunkte Intervalle I_0 und I_1 aus $\mathbb{I}$ mit $I_0 \subseteq I, I_1 \subseteq I, x_0 \in I_0$ und $x_1 \in I_1$, deren Längen höchstens halb so groß sind wie die Länge von I. Mithilfe einer Auswahlfunktion auf $\mathrm{Pot}(\mathbb{I} \times \mathbb{I})$ lassen sich daher Funktionen $h_0, h_1 : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ gewinnen, sodass für alle $I \in \mathbb{I}$ gilt:

i)$'$ $h_0(I)$ und $h_1(I)$ sind höchstens halb so lang wie I,

ii)$'$ $h_0(I) \subseteq I$ und $h_1(I) \subseteq I$,

iii)$'$ $h_0(I) \cap h_1(I) = \emptyset$.

Sei $I_\emptyset$ ein Intervall aus $\mathbb{I}$, das eine Länge $\leq \mathbf{1}$ hat. Wir definieren h auf $\mathrm{Seq}_\omega(\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\})$ induktiv durch $h(\emptyset) := I_\emptyset$, und für $s \in \mathrm{Seq}_\omega(\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\})$ mit $\mathrm{Def}(s) = i$:

$$h(s \cup \{(i, \mathbf{0}\}) := h_0(h(s)) \text{ und } h(s \cup \{(i, \mathbf{1}\}) := h_1(h(s)).$$

Dann gelten (i), (ii) und (iii). □

Satz 4.9 Mächtigkeit abgeschlossener Teilmengen von $\mathbb{R}$

$$X \text{ abgeschlossene Teilmenge von } \mathbb{R} \Rightarrow (|X| \leq \aleph_0 \vee |X| = |\mathbb{R}|).$$

Beweis. Jede abgeschlossene Teilmenge $X \subset \mathbb{R}$, hat laut dem Satz von Cantor und Bendixson eine Aufteilung in disjunkte Teilmengen $X = Y \cup Z$, wobei Y perfekt ist und $|Z| \leq \aleph_0$. Wegen Hilfssatz 4.11 ist also $|Y| \in \{\mathbf{0}, |\mathbb{R}|\}$ und deshalb $|X| = (|Y| + |Z|) \in \aleph_0 \cup \{\aleph_0, |\mathbb{R}|\}$ □